Kernels associated with cylindrical measures and probability measures

AUTHOR(S):

高橋, 泰嗣

CITATION:

高橋, 泰嗣. Kernels associated with cylindrical measures and probability measures. 数理解析研究所講究録 1983, 504: 90-109

ISSUE DATE:

1983-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/103717

数理解析研究所講究録
504巻 1983年 90-109

Kernels associated with cylindrical measures and probability measures

山口大教養　高橋　泰嗣　(Yasuji Takahashi)

周知のようにGaussian Radon measureの研究において，その reproducing kernelは強力な道具となっている。一般に，locally convex space E上のBorel probability (or cylindrical) measure μ に対しても，μ のkernel K_μ が定義できる。最近kernelの研究が盛んであるが（例えば，Borel [2], Chevet [3, 4], Kwapien and Smolenski [6]），本講演では μ のadmissible shifts, partially admissible shifts に関連して知られているいくつかの結果をkernelに対して一般化するという方向で議論を進めたい。我々の結果は，既知のものの一般化であると共に，kernel特有の興味深い事実も含む。

§1．定義と基本Lemma．　Eを locally convex space，E^* をその topological dual，μ をE上の cylindrical measureとする。$x \in E$ に対して，E上の cylindrical measure μ_x を $\mu_x(Z) = \mu(Z - x)$（Z；Eの cylindrical set）で定義する。

Def. 1.1. $x \in E$ が μ の admissible shift

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ ;\ \mu(Z) < \delta \Rightarrow \mu_x(Z) < \varepsilon.$$

μ の admissible shifts 全体を M_μ で表わすことにする。

Def. 1.2. $x \in E$ が μ の partially admissible shift

$$\Longleftrightarrow 0 \overset{\exists}{<} \varepsilon < 1,\ \exists \delta > 0\ ;\ \mu(Z) < \delta \Rightarrow \mu_x(Z) < 1 - \varepsilon.$$

μ の partially admissible shifts 全体を $\widetilde{M}_\mu$ で表わすことにする.

Def. 1.3. $p > 0$ に対して, μ : weak p-th order

$$\Longleftrightarrow \|x^*\|_p = \left(\int_E |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty,\ \forall x^* \in E^*.$$

μ の characteristic functional $\hat{\mu}(x^*)$ は $\int_E e^{i\langle x^*, x\rangle} d\mu(x)$, ($x^* \in E^*$) で定義される。

Def. 1.4. τ を E^* 上の linear topology とする時.

μ : type 0 w.r.t. $\tau \Longleftrightarrow \hat{\mu}$ が τ-continuous

μ : type p w.r.t. $\tau \Longleftrightarrow \mu$: weak p-th order かつ $\|x^*\|_p$ が τ-continuous.

次に μ の Kernel を定義しよう。cylindrical measure μ に対応する random linear functional を $L : E^* \longrightarrow L^0(\Omega, \Sigma, P)$ とする (cf. Dudley [5])。E^* 上に L^0-位相の L による inverse image を考えて, これを τ_μ で表わすことにする。この時明らかに τ_μ は E^* 上の semi-metrizable linear topology である。(一般には τ_μ は locally convex でも, Hausdorff でもない。)

Def. 1.5. (E^*, τ_μ) の topological dual を K_μ で表わす。

K_μ は μ の kernel と呼ばれる。

次の事実は明らかであろう。

Lemma 1.1. τ を E^* 上の linear topology とする時,

μ : type 0 w.r.t. $\tau \iff L : (E^*, \tau) \longrightarrow L^0(\Omega, \Sigma, P)$ continuous

μ : type p w.r.t. $\tau \iff L(E^*) \subset L^p(\Omega, \Sigma, P)$ かつ

$L : (E^*, \tau) \longrightarrow L^p(\Omega, \Sigma, P)$ cont.

Lemma 1.2. (cf. Takahashi [13]) $M_\mu \subset \tilde{M}_\mu \subset K_\mu$.

Lemma 1.3. (cf. Yamasaki [20]) $\{x_n^*\} \subset E^*$ とする時,

$x_n^* \longrightarrow 0$ w.r.t. $\tau_\mu \iff \hat{\mu}(x_n^*) \longrightarrow 1$.

μ に対して, E^* 上の semi-metric d_μ を次のように定義する。 $d_\mu(x^*, y^*) = \int_E \frac{|\langle x^* - y^*, x \rangle|}{1 + |\langle x^* - y^*, x \rangle|} d\mu(x)$ ($x^*, y^* \in E^*$)。

この時, d_μ は translation-invariant, 明らかに d_μ で定義された E^* 上の topology は linear structure に compatible で, τ_μ と同等である。 τ_μ, K_μ に関する詳細は Chevet [3, 4] を参照されたい。

最後に L^0-imbeddable space を特徴付けるのに重要な役割りを果す negative definite function を導入しよう。(詳細は Berg & Forst [1], Shoenberg [10] を参照)。

Def. 1.6. X を vector space, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ とする。

φ : negative definite $\iff$ (i) $\varphi(0) \geqq 0$ (ii) $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$ $\forall x \in X$

(iii) $\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_i - x_j) \leqq 0$ $\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ $(\sum \alpha_i = 0)$, $\forall x_1, \cdots, x_n \in X$.

Lemma 1.4. (cf. Berg & Forst [1])

φ: negative definite $\Longrightarrow \dfrac{\varphi}{1+\varphi}$: negative definite

Lemma 1.5. (cf. Shoenberg [10]) φ: negative definite

$\Longleftrightarrow$ $\varphi(0) \geqq 0$, $^\forall t>0$ (fix) ; $\exp(-t\varphi)$: positive def.

Example. Lemma 1.4 より. 先に定義された E^*上の semi-metric d_μ について, $x^* \longrightarrow d_\mu(x^*, 0)$ は negative definite である。また $0<p\leqq 2$, μ : weak p-th order とする時, 先に定義された E^*上の quasi-seminorm $\|\cdot\|_p$ について, $x^* \longrightarrow \|x^*\|_p^p$ は negative definite である。

§2. Xiaの不等式とChevetの不等式. この節では quasi-invariant measure に関連したXiaの不等式と, cylindrical measure の kernel に関連したChevetの不等式の一般化を与える。よく知られているように, これらの不等式は応用上も極めて重要である。

次の結果はXiaの不等式の抽象的な一般化である。

Theorem 2.1. E, F : linear topological spaces, $T: F \longrightarrow E$ cont. linear map とする。もし F : barrelled , $f: E^* \longrightarrow [0,\infty]$ が次の (1), (2) をみたすならば; (1) $0 \leqq f(tx^*) \leqq tf(x^*) \leqq \infty$, $^\forall t>0$, $^\forall x^* \in E^*$, (2) $^\forall y \in F$ $^\exists \delta>0$; $f(x^*)<\delta \Rightarrow |\langle x^*, Ty\rangle| < 1$, $(^\forall x^* \in E^*)$ $\Longrightarrow$ $^\exists V \subset F$ (neigh. of 0) ; $^\forall x^* \in E^*$

$$\sup_{y\in V} |\langle x^*, Ty\rangle| \leqq f(x^*) .$$

Remark 2.1. Th. 2.1 における F; barrelled の仮定はぎりぎりの条件である。即ち、次が成立。F; locally convex の時，Th. 2.1 が成立する $\Longrightarrow$ F: barelled。

次の結果は Xia [19]，Linde [7]，筆者 [13] を一般化する。

Corollary 2.2. E, F: linear top. space，T: F $\to$ E cont. linear map，$0<p<\infty$ とする。F: barelled，$^{\exists}\mu$: Cylindrical measure on E s.t. $K_\mu \supset T(F)$ $\Longrightarrow$ $^{\exists}V \subset F$ (neigh. of 0)

$$\text{s.t.} \quad \sup_{y \in V} |\langle x^*, Ty \rangle| \leqq \left(\int_E |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad {}^{\forall}x^* \in E^*.$$

quasi-invariant measure に対しては

Corollary 2.3. (cf. Okazaki [9]) E, F, T, p は Cor. 2.2 と同じとする。F; barelled，$^{\exists}\mu$: Borel prob. meas. on E s.t. $M_\mu \supset T(F)$ $\Rightarrow$ $^{\forall}A \subset E$ (measurable，$\mu(A)>0$)，

$$^{\exists}V \subset F \quad \text{s.t.} \quad \sup_{y \in V} |\langle x^*, Ty \rangle| \leqq \left(\int_A |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad {}^{\forall}x^* \in E^*.$$

Remark 2.2. Cor. 2.3 は $K_\mu \supset T(F)$ の仮定では成立しない。

Corollary 2.2. より次を得る。

Corollary 2.4. E: barrelled locally convex Hausdorff space，$^{\exists}\mu$: cylindrical measure on E of weak p-th order ($p>0$) s.t. $K_\mu \supset E$ $\Longrightarrow$ E: normable.

次に Chevet の不等式を一般化する。

Theorem 2.5. E, F; linear topological space，T: F $\to$ E cont. linear map とする。もし F; second category，

$f_n : E^* \longrightarrow [0, \infty]$ $(n=1,2,\cdots)$ が次の (1), (2) をみたすならば;
(1) $0 \leqq f_n(tx^*) \leqq t f_n(x^*) \leqq \infty$, $\forall n$, $\forall t>0$, $\forall x^* \in E^*$, (2) $\forall y \in F$,
$\exists n$ $\exists \delta>0$; $f_n(x^*)<\delta \Rightarrow |\langle x^*, T(y)\rangle|<1$, $\forall x^* \in E^*$,
$\Longrightarrow$ $\exists n$ $\exists V \subset F$ (neigh. of 0) s.t. $\forall x^* \in E^*$,

$$\sup_{y \in V} |\langle x^*, T(y)\rangle| \leqq f_n(x^*) .$$

Remark 2.3. Th. 2.5 における F : second category の仮定はほとんどぎりぎりの条件である。Th. 2.5 及び次の Cor. 2.6 は F : barrelled では成立しない。

次の結果は Chevet [3] を一般化する。(Chevet の定理においては F : metrizable, second category の仮定であった。)

Corollary 2.6. E, F : linear top. space, $T : F \longrightarrow E$ cont. linear map とする。F : second category, $\exists \mu$: cylindrical measure on E s.t. $K_\mu \supset T(F) \Longrightarrow \exists \varepsilon>0$, $\exists V \subset F$ s.t.

$$\sup_{y \in V} |\langle x^*, T(y)\rangle| \leqq \inf\{\alpha>0 ; \mu\{x \in E ; |\langle x^*, x\rangle|>\alpha\}<\varepsilon\}, \forall x^* \in E^* .$$

この結果から次を得る。

Corollary 2.7. E : locally convex Hausdorff, second categ. $\exists \mu$: cylindrical measure on E s.t. $K_\mu \supset E \Rightarrow E$: normable.

Cor. 2.4 と Cor. 2.7 を比較して, Cor. 2.4 においては μ : weak p-th order の仮定をおとせない。ここに barrelled と second category の違いが現われる。

ここで得られた種々の不等式は様々な応用をもつが,

例えば，Cor. 2.2. は Banach 空間上の quasi-inv. cylindrical measure に関する Linde [7] の結果の一般化であるから，彼が得たいくつかの結果は（それらはほとんどこの不等式を使って得ている），barrelled space 上の cylindrical measure の kernel に対して一般化できる。しかしながら，我々は次の §3 と §4 で，一般の locally convex space 上の cylindrical measure の kernel に対して（この不等式を用いないで），Linde の結果を一般化する。Cor. 2.2 の一つの応用は §5 で measure case に対して行なわれる。

この節の結果に関する詳細は，筆者 [15] を参照されたい。

§3. Kernels of cylindrical measures of type 0.

この節では type 0 の cylindrical measure の kernel について考察する。特に，"Factorization theorem through a subspace of a L^0-space" とその結果としての "Characterization of L^0-imbeddable space" を中心に議論する。詳細は筆者 [16] を参照されたい。

Lemma 3.1. E, F: locally convex spaces, $T: F \longrightarrow E$ cont. linear map, τ: E^* 上の semi-metrizable linear topology とする。この時，次は同等である。

(1) $(E^*, \tau)^* \supset T(F)$,

(2) $\tau \geq \sigma(E^*, T(F))$ (weak*-topology)

(3) $T^*: (E^*, \tau) \longrightarrow (F^*, \tau_k)$ cont. (τ_k ; Mackey top. on F^*)。

更に，もし F : quasi-complete or barrelled ならば，上の (3) における τ_k は strong top. $b(F^*, F)$ でおきかえることができる。

§1. の lemmas と Lemma 3.1 を使って，次の "Factorization theorem" を得る。

Theorem 3.2. E, F : locally convex space, $T: F \longrightarrow E$ cont. linear map, τ : linear topology on E^* とする。次は同等。

(1) $^\exists$probability space (Ω, ν) s.t. $T^*: (E^*, \tau) \longrightarrow (F^*, \tau_k)$ は $L^0(\Omega, \nu)$ の subspace を通って分解される。

(2) $^\exists\mu$: Cylindrical measure on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $K_\mu \supset T(F)$.

(3) $^\exists d$: translation-invariant semi-metric on E^*, E^* の linear structure に compatible s.t. $x^* \longrightarrow d(x^*, 0)$: negative definite, τ-cont., d で定義された E^* 上の top. $\geqq \sigma(E^*, T(F))$。

更に，もし F : quasi-complete or barrelled ならば，(1) における τ_k は $b(F^*, F)$ でおきかえても成立する。

次の結果は Chevet [3], Okazaki [8] と類似のものである。

Corollary 3.3. E : locally convex space, τ : linear top. on E^* s.t. $\sigma(E^*, E) \leqq \tau \leqq \tau_k(E^*, E)$。次は同等である。

(1) $^\exists$Prob. space (Ω, ν) s.t. (E^*, τ) は $L^0(\Omega, \nu)$ の subspace と

同型. i.e. (E^*, τ) は L^0-imbeddable.

(2) $\exists \mu$: Cylindrical meas. on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $K_\mu \supset E$.

(3) $\exists d$: translation-inv. metric on E^* s.t. $x^* \to d(x^*, 0)$: negative definite, d で定義された top. は τ と同等である。

更に, もし E: quasi-complete or barrelled ならば, τ_K は $b(E^*, E)$ でおきかえても成立する。

次に詳細を考察しよう。

Proposition 3.4. E: locally convex Hausdorff space. 次は同等である。

(1) E は有限次元空間の高々可算個の和として表わせる.

(2) $\exists \mu$; cylindrical measure on E of type 0 w.r.t. $\sigma(E^*, E)$ s.t. $K_\mu \supset E$.

Proposition 3.5. E: locally convex Hausdorff, second category, $\exists \mu$: cylindrical measure on E s.t. $K_\mu \supset E$. この時, Cor. 2.7 より E は normable となるが, 次が成立する。

(1) μ: type 0 w.r.t. $C(E^*, E)$ (compact conv. topology),

$\Longrightarrow$ $\dim E < \infty$.

(2) μ: type 0 w.r.t. $\tau_K(E^*, E) \Longrightarrow E$: reflexive Banach space, (E^*, b): reflexive Banach space of cotype 2.

(3) μ: type 0 w.r.t. $b(E^*, E) \Longrightarrow E$: normable, (E^*, b): Banach space of cotype 2.

Remark 3.1. E が second category でなければ，例え barrelled であっても，Prop. 3.5 は成立しない。

§4. Kernels of cylindrical measures of type p

この節では type p の cylindrical measure の kernel について考察する。L^p-imbeddable space, pre-Hilbert space 及び countably pre-Hilbert space の characterization を中心に議論する。詳細は筆者[16] を参照されたい。以下において，$0<p<\infty$ とする。

Theorem 4.1. E, F: locally convex space, $T: F \longrightarrow E$ cont. linear map, τ: linear topology on E^* とする。この時次の (1), (2) に対して，(1) $\Longrightarrow$ (2) が成立する。

(1) $^\exists \mu$: cylindrical measure on E of type p w.r.t. τ

s.t. $K_\mu \supset T(F)$。

(2) $^\exists$ probability space (Ω, ν) s.t. $T^*: (E^*, \tau) \longrightarrow (F^*, \tau_K)$ は $L^p(\Omega, \nu)$ の subspace を通って分解される。

更に，F: quasi-complete or barrelled ならば，(2) において，τ_K は $b(F^*, F)$ でおきかえても成立する。

Example. $p>2$ とする。この時，ℓ^p 上の cylindrical measure μ で； μ: type 2 w.r.t. the strong topology, $K_\mu \supset \ell^2$ となるものが存在する。（例えば ℓ^2 上の canonical Gauss cylindrical measure の inclusion map : $\ell^2 \longrightarrow \ell^p$ による image)。

しかしながら，このようなμは，$2 < q < p$ なる任意の q に対して，$K_\mu \supset \ell^q$ とは決してならない。何故ならば，もしそのような q があれば，Th. 4.1 より inclusion map: $\ell^q \longrightarrow \ell^p$ は Hilbertian であるから，従って compact となるはずである。これは矛盾。

Th. 4.1. は $p = 0$ の時も成立する。（この場合は逆も成立する。cf. Theorem 3.2.）一般には (2) ⇒ (1) は成立しないが，$p = 2$ の時は次のように成立する。

Theorem 4.2. E, F: locally convex spaces, $T: F \longrightarrow E$ cont. linear map, τ: linear topology on E^* とする。この時次は同等である。

(1) $T^*: (E^*, \tau) \longrightarrow (F^*, \tau_k)$ は pre-Hilbert space を通って分解される。i.e. T^* は pre-Hilbertian.

(2) $\exists \mu$: cylindrical measure on E of type 2 w.r.t. τ s.t. $K_\mu \supset T(F)$.

更に，もし F: quasi-complete or barrelled ならば，(1) における τ_k は $b(F^*, F)$ でおきかえて成立する。

Theorem 4.1 より次を得る。

Corollary 4.3. E; locally convex space, τ: linear topology on E^* s.t. $\sigma(E^*, E) \leqq \tau \leqq \tau_k(E^*, E)$ とする。この時，$\exists \mu$: cylindrical measure on E of type p w.r.t. τ s.t.

$K_\mu \supset E \Longrightarrow \exists$ prob. space (Ω, ν) s.t. (E^*, τ) は $L^p(\Omega, \nu)$ の subspace と同型。i.e. (E^*, τ) は L^p-imbeddable。

Theorem 4.2 より次を得る。

Corollary 4.4. E: locally convex space, τ: linear topology on E^* s.t. $\sigma(E^*, E) \leqq \tau \leqq \tau_K(E^*, E)$ とする。この時，次は同等である。

(1) (E^*, τ) は pre-Hilbert space と同型である。

(2) $\exists \mu$: Cylindrical measure on E of type 2 w.r.t. τ s.t. $K_\mu \supset E$。

Remark 4.1. Cor. 4.3 及び Cor. 4.4 において，もし E が quasi-complete or barrelled ならば，τ_K は $b(E^*, E)$ でおきかえてよい。従ってこれらの結果は Linde [7] を一般化する。他方，Linde の結果は Shimomura [11] により，次の如く一般化されている。E, τ は Cor. 4.4 と同様とせよ。この時，(E^*, τ): pre-Hilbert space と同型 $\Longleftrightarrow$ $\exists \mu$: Cylindrical measure on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $M_\mu \supset E$。この結果は Cor. 4.4 と比べると，type 0 の仮定は弱いが，$M_\mu \supset E$ の仮定は強い。我々の結果は，type 0 の仮定では決して成立しないことに注意しよう。

Cor. 4.4 は pre-Hilbert space の一つの characterization を与えるが，次にこれと類似の，Countably pre-Hilbert space

の characterization を与えよう。

Theorem 4.5. E: locally convex space, τ: linear topology on E^* s.t. $\sigma(E^*,E) \leqq \tau \leqq \tau_k(E^*,E)$ とする。次は同等。

(1) (E^*,τ): countably pre-Hilbert space と同型。

(2) $^\exists\{\mu_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$: Cylindrical measures on E of type 2 w.r.t. τ s.t. $\bigcup_n M_{\mu_n} = E$.

(3) $^\exists\{\mu_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$: Cylindrical measures on E of type 2 w.r.t. τ s.t. $\bigcup_n \tilde{M}_{\mu_n} = E$.

(4) $^\exists\{\mu_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$: Cylindrical measures on E of type 2 w.r.t. τ s.t. $\bigcup_n K_{\mu_n} \supset E$。

次に partially admissible shifts が全空間 E に広がっているような Cylindrical measure μ を構成しよう。

Proposition 4.6. E, τ は Th. 4.5 と同様とせよ。この時，(E^*,τ) が countably pre-Hilbert space であれば，(3) をみたす $\{\mu_n\}$ が存在する。いま，$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n$ とおけば，μ は E 上の Cylindrical measure で，μ: type 0 w.r.t. τ かつ，$\tilde{M}_\mu = E$ となる。

Remark 4.2. Prop. 4.6 で構成した μ は，もし (E^*,τ) が pre-Hilbert space でなければ，決して type 2 w.r.t. τ ではない。我々は逆に興味がある。i.e. $^\exists\mu$: Cylindrical measure on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $\tilde{M}_\mu = E$

$\Longrightarrow$ (E^*, τ) : countably pre-Hilbert space ?

μがBorel probability measureの場合に，次の§でこの問題を考えることにしよう。

§5. Kernels of Borel Probability measures.

今までCylindrical measureのkernelを考察してきたが，ここではBorel probability measureのkernelを考察しよう。簡単のため，以下Eはlocally convex Hausdorff spaceとしよう。μをE上のBorel probability measureとする時，§1.と同様に，μのadmissible shifts全体をM_μ，partially admissible shifts全体を$\widetilde{M}_\mu$，kernelをK_μで表わすことにする。当然$M_\mu \subset \widetilde{M}_\mu \subset K_\mu$が成立する。よく知られているように，Eが無限次元の時，μはE-quasi-inv.ではあり得ない。即ち，$M_\mu \subsetneqq E$（例えば，cf. Umemura[18]）。しかし，M_μのlinear spanを$\mathcal{L}(M_\mu)$で表わす時，$\mathcal{L}(M_\mu) = E$となる事はあり得る。これについては次が成立する。

Theorem 5.1. Eをquasi-completeとする時，次は同等。

(1) Eは有限次元空間の高々可算個の和として表わせる。

(2) $^\exists\mu$: Borel probability measure on E s.t. $\mathcal{L}(M_\mu) = E$。

この結果から，明らかに次が成立。

Corollary 5.2. Eをquasi-complete，μをE上のBorel prob.で$\mathcal{L}(M_\mu) = E$なるものとする。この時，M_μは無限次

元 subspaceを含まない。

次の問題は, $M_\mu \subset \widetilde{M}_\mu$ であるから, $\widetilde{M}_\mu = E$ となる場合があり得るであろうか? 今までに知られた結果としては, E が Hilbert space の時は, $\widetilde{M}_\mu$ は E で first category, 従って $\widetilde{M}_\mu \neq E$ (cf. Skorohod [12]), E が Fréchet space の時も, $\widetilde{M}_\mu$ は E で first category, 従って $\widetilde{M}_\mu \neq E$ (cf. 筆者[14]) 等がある。これらとの関連では, もっと一般に次が成立。

Proposition 5.3. E を locally convex Hausdorff space とする時, $\widetilde{M}_\mu$ は E で first category である。従って E が second categ. ならば, $\widetilde{M}_\mu \neq E$ となる。

以上の議論(以下も同様)において, E は無限次元であると仮定する。ところで, E が second category でない場合は事情は異なる。次が成立する。

Theorem 5.4. E: locally convex Hausdorff, τ: E^* 上の linear top. s.t. $\sigma(E^*, E) \leqq \tau \leqq \tau_K(E^*, E)$. この時, 次は同等。

(1) (E^*, τ): nuclear countably pre-Hilbert space

(2) $^\exists \mu$: Borel prob. on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $\widetilde{M}_\mu = E$.

Remark 5.1. E が quasi-complete or barrelled ならば, 次が成立。 $^\exists \mu$: Borel prob. on E s.t. $\widetilde{M}_\mu = E$

$\Longrightarrow$ (E^*, b): nuclear countably pre-Hilbert space.

最後に Kernel について考察しよう。§2. で得られた

不等式(Corollary 2.2)を使って，次の諸結果を得る。

Theorem 5.5. E を complete separable countably Hilbert space, μ を E 上の Borel prob. measure とする。この時 $\exists G, H$: Hilbert spaces s.t. $K_\mu \subset G \subset H \subset E$, $G \to H$: Hilbert-Schmidt, $H \to E$: continuous。

closed graph theorem によって，次が得られる。

Corollary 5.6. E: complete sep. countably Hilbert space, F: barrelled space, $T: F \to E$ cont. linear map とする。この時次は同等である。

(1) $T: F \to E$ は Hilbert-Schmidt operator を通して分解される。

(2) $\exists \mu$: Borel prob. on E s.t. $K_\mu \supset T(F)$.

E が Banach 空間の場合，Cor. 5.6 のような形の結果を得ることは，一般に不可能である。次に述べる結果は，数列空間 ℓ^p における Xia [19] の結果を関数空間 L^p に一般化する。

(Ω, Σ, μ), (Ω, Σ, ν) を σ-finite measure spaces とする。簡単の為 $\mu \sim \nu$ (equivalent) としよう。$1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq 2$, $L^q(\Omega, \nu) \subset L^p(\Omega, \mu)$ で自然な埋め込みを T で表わすことにする。この時，closed graph theorem により T は連続となる。

Theorem 5.7. 次は同等である。

(1) $T^*: (L^p(\Omega, \mu))^* \longrightarrow (L^q(\Omega, \nu))^*$ は absolutely summing.

(2) $\exists P$: Borel prob. on $L^p(\Omega,\mu)$ s.t. $K_P \supset L^q(\Omega,\nu)$.

Remark 5.2. $2<q<\infty$ の時も (2) ⟹ (1) は成立する。いま $[0,1]$ 上のルベーグ測度 m に関する L^p-space を $L^p[0,1]$ で表わすことにすれば，$1\leqq q<\infty$ に対して，$L^q[0,1]\subset L^1[0,1]$ である。この時，$L^1[0,1]$ 上の任意の Borel prob. μ に対して，$K_\mu \not\supset L^q[0,1]$ となることがわかる。

次に，$K_\mu \supset E$ なる場合を考察しよう。

Lemma 5.8. E : barrelled normed space とする。この時 $\exists\mu$: Borel prob. on E s.t. $K_\mu \supset E \implies \dim E<\infty$.

Lemma 5.8 において，barrelled の仮定はおとせないことに注意しよう。この lemma と Corollary 2.7 より次を得る。

Proposition 5.9. E を second categ. とする。この時，$\exists\mu$: Borel prob. on E s.t. $K_\mu \supset E \implies \dim E<\infty$.

Prop. 5.9 は一般に barrelled space では成立しないが，Lemma 5.8 と Corollary 2.4 から次を得る。

Proposition 5.10. E を barrelled space とする。この時 $\exists\mu$: Borel prob. on E of weak p-th order $(p>0)$ s.t. $K_\mu \supset E \implies \dim E<\infty$.

Prop. 5.10 において，μ : weak p-th order の仮定はおとせない。次にこの節の主定理を述べよう。

Theorem 5.11. E : locally convex Hausdorff，T : linear topology on E^* s.t. $\sigma(E^*,E) \leqq \tau \leqq \tau_K(E^*,E)$。この時次は同等。

(1) (E^*,τ) : nuclear countably pre-Hilbert space.

(2) $\exists \mu$: Borel prob. on E of type 0 w.r.t. τ s.t. $K_\mu \supset E$.

Remark 5.3. E が separable Fréchet space の時，Kwapien & Smolenski [6] が類似の結果を得ているが，彼らの場合，決して $K_\mu \supset E$ とはならないことに注意しよう。(cf. Prop. 5.9)。我々の結果から，彼らの結果の一般化を得ることは容易にできるが，ここでは省略する。尚，最近，九大の岡崎氏が独立に我々と同様の結果を得たことを付記しておく。

Lemma 5.12. $K_\mu \supset E \implies \mu$: type 0 w.r.t. $b(E^*,E)$.

これと Th. 5.11 及び Lemma 3.1 より次を得る。

Theorem 5.13. E : quasi-complete or barrelled とする。
$\exists \mu$: Borel prob. on E s.t. $K_\mu \supset E$
$\implies (E^*, b)$: nuclear countably pre-Hilbert space.

Th. 5.11 と同様の考察から次を得る。(Minlos' Th. の逆)。

Theorem 5.14. E : locally convex Hausdorff, L^0-imbeddable とする。この時，次は同等である。

(1) E : nuclear

(2) $\forall \varphi$: positive definite cont. fn. on E, $\varphi(0)=1$,
$\exists \mu$: Borel prob. on (E^*,σ) s.t. $\varphi(x)=\hat{\mu}(x)$, $\forall x \in E$.

References

[1] C.Berg and G.Forst, Potential theory on locally compact Abelian groups, Springer, 1975.

[2] C.Borel, Random functionals and subspaces of probability one, Arkiv for Matematik 14 (1976), 79-92.

[3] S.Chevet, Quelques nouveaux resultats sur les mesures cylindriques, Lecture Notes in Math., 644 (1978), 125-158.

[4] ————, Kernel associated with a cylindrical measure, Lecture Notes in Math., 860 (1981), 51-84.

[5] R.M.Dudley, Random linear functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 136 (1969), 1-24.

[6] S.Kwapien and W.Smolenski, On the nuclearity of a dual space with the convergence in probability topology, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 59 (1982), 197-201.

[7] W.Linde, Quasi-invariant cylindrical measures, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 40 (1977), 91-99.

[8] Y.Okazaki, L^0-embedding of a linear metric space, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., 33 (1979), 391-398.

[9] ————, Bochner problem on a topological vector space with a quasi-invariant measure, Proc. Japan Acad., 57 (1981), 25-28.

[10] I.J.Schoenberg, Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 522-536.

[11] H.Shimomura, Some results on quasi-invariant measures on infinite-dimensional spaces, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 703-713.

[12] A.V.Skorohod, Integration in Hilbert space, Springer, 1974.

[13] Y.Takahashi, Partially admissible shifts on linear topological spaces, Hokkaido Math. J., 8 (1979), 150-166.

[14] ————, Hilbertian support of probability measures on locally convex spaces and their applications, Hokkaido Math. J., 10 (1981), 57-74.

[15] ————, Remarks on Xia's inequality and Chevet's inequality concerned with cylindrical measures, preprint.

[16] ————, Kernels associated with cylindrical measures on locally convex spaces, preprint.

[17] F.Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967.

[18] Y.Umemura, Measures on infinite dimensional vector spaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1 (1965), 1-47.

[19] D.Xia, Measure and integration theory on infinite-dimensional spaces, Academic Press, 1972.

[20] Y.Yamasaki, Quasi-invariance of measures on an infinite dimensional vector space and the continuity of the characteristic functions, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 16 (1980), 767-783.